مقارنة بين أفضل الطرق الاعتيادية والبيزيه
لتقدير معلمة القياس ودالة المعولية لتوزيع رايلي

أ.م.د أنعام عبدالرحمن نعمان
Inaamsta@uodiyala.edu.iq

أرشد حميد حسن
arshadeco@uodiyala.edu.iq

أمل هادي رشيد
amal@uodiyala.edu.iq

جامعة ديالى / كلية الإدارة والاقتصاد / قسم الإحصاء

ISSN 2709-6475 DOI: https://dx.doi.org/10.37940/BEJAR.2021.S.1

تأريخ استلام البحث 2021/5/16 **تأريخ قبول النشر 2021/7/26**

المستخلص

يعد توزيع رايلي (Rayleigh Distribution) من التوزيعات الاحتمالية المهمة وكذلك هو أحد نماذج الفشل الشائعة في حقل المعولية واختبارات الحياة وتحليل الإشارات، تَركز هذا البحث على المقارنة ما بين بعض طرائق التقدير المعروفة (الاعتيادية والبيزية) لمعلمة القياس ودالة المعولية، وإن منهجية البحث تعتمد على دراسة نظرية، فقد تم اشتقاق طرائق التقدير الاعتيادية والبيزية وبشكل تفصيلي للتوصل إلى صيغ مقدّرات هذه الطرائق وصيغ مقدّرات دالة المعولية لها، كذلك اعتمد البحث على دراسة تجريبية عن طريق تصميم عدد من تجارب المحاكاة (Simulation) باستخدام معيار متوسط مربعات الخطأ (MSE)، وقد أظهرت نتائج البحث بأن طريقة المقدرات التجزيئية هي الأفضل من بقية طرائق التقدير الأخرى بالنسبة لأغلب القيم، وقد أوصى الباحث بأن استخدام طرائق اعتيادية وبيزية جديدة للتقدير وذلك باستخدام دوال خسارة مختلفة.

الكلمات المفتاحية: توزيع رايلي، طريقة الإمكان الأعظم، مقدر بيز، دالة المعولية.

مجلة اقتصاديات الأعمال
العدد (خاص – ج1) أيلول / 2021
الصفحات: 11-21

A Comparison of the usual and standard method for Estimating the measurement Parameter and Reliability Function for the Rayleigh Distribution

Abstract

Rayleigh distribution is an important probability distribution, as well as a common failure model in the field of reliability, life tests, and signal analysis. The research focused on the comparison between some of the well-known estimation methods (classical and Bayesian) for the scale parameter and reliability function, The methodology of the research depends on theoretical study, the methods of classical and Bayesian estimation has been determined elaborately to arrive to the estimations forms of reliability. Also this research depends on an experimental study by designing number of simulation experiments using by using the one standards; Mean Square Error (MSE), the results of the research showed that the PERCE method is better than other estimation methods in relation to most values. The researcher recommended that new normal and Bayesian methods be used for estimation by using different loss functions.

1. المقدمة Introduction:

يعد الإحصاء من الأمور القديمة المعروفة لدى المجتمعات، إذ يحرص القادة والزعماء والملوك على إحصاء عدد الجنود والأسلحة لخوض الحروب واستعراض القوة، كما تحرص الجماعات على إحصاء عدد أفرادها من أجل معرفة قوتها وكثرتها، وقد وردت كلمة الإحصاء ومشتقاتها في القرآن الكريم إحدى عشرة مرة، منها قوله تعالى: (وَكُلَّ شَيْءٍ أَحصَيْنَاهُ كِتابا) (النبأ: 29)، وبعد الانتشار الواسع للصناعة في القرن الماضي ازداد الاهتمام بدراسة نظرية المعولية (Reliability Theory)، وكانت معظم بحوث العمليات قبل (1940) مقتصرةً على السيطرة النوعية، ولم تشخص المعولية حينها. لكن بعد الحرب العالمية الثانية ونتيجة لزيادة انتاج المُعدّات الحربية المعقدة أصبح لحقل المعولية كيان مستقل استمر بالتطور ما زالت هناك معولية للمعدات تكون هناك رغبة لتحسينها، إن اهتمام الشركات المُنتجة للأجهزة بدراسة نظرية المعولية أسهم بشكل كبير في التطور الحاصل لإنتاجها، ووضع الخطط الإنتاجية المستقبلية لتقديم أفضل الخدمات ثم لتحقيق أفضل الأرباح، إذ إِن توقف ماكنة في مصنع يُعد عائقاً للإنتاج فضلاً عن ضياع الوقت وتكاليف التصليح. وإن للمعولية أهمية في حياة الإنسان، إذ أنها مهمة في حل مشاكل نظرية البقاء (Survival Theory) وتحليل جداول الحياة، إذ إِن لكل منهما له خاصية قياس طول الحياة.

2. هدف البحث Purpose of Search:

أخذت مسألة التقدير اهتماماً كبيراً في التطبيقات الإحصائية والهندسية ومختلف العلوم التطبيقية والإنسانية لما تقدمه من وسائل ساعدت في التعرف بصورة أكثر دقة على العديد من العمليات المشوبة بأخطاء عشوائية، ولكن بعد التوسع الحاصل في استعمال موضوع التقدير في التوزيعات الإحصائية، فقد ظهرت طرق مختلفة للتقدير معلمية ومنها اللامعلمية، وفي بحثنا هذا سوف نتطرق إلى مجموعة من الطرق لتقدير معلمة القياس Parameter Scale بالنسبة إلى توزيع رايلي والمقارنة بين هذه الطرق بالاعتماد على مقاييس إحصائية لمعرفة الأفضل منها تحت ظروف مختلفة هو معيار متوسط مربعات الخطأ MSE.

3. توزيع رايلي Rayleigh Distribution:

يعد هذا التوزيع من التوزيعات الاحتمالية المهمة في مجال تحليل الخطأ سواء لمختلف الأنظمة أو في التحليلات المفردة. ويعد أنموذج للفشل في مجال اختبار الحياة. كذلك يستخدم توزيع ريلي في دراسة ظاهرة ارتفاع الأمواج البحرية في المحيطات وأيضاً في دراسة سرعة الرياح، وكذلك استخداماته في معرفة قوة الإشارات اللاسلكية والراديوية في ساعات الذروة للاتصالات (جلوب وشفيق، 2013، 318-328)، وكالآتي:

إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية p.d.f تعطى بالصيغة:

$$f(t:\theta) = \frac{2}{\theta}\ t\, e^{-t^2/\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

إذ أن:

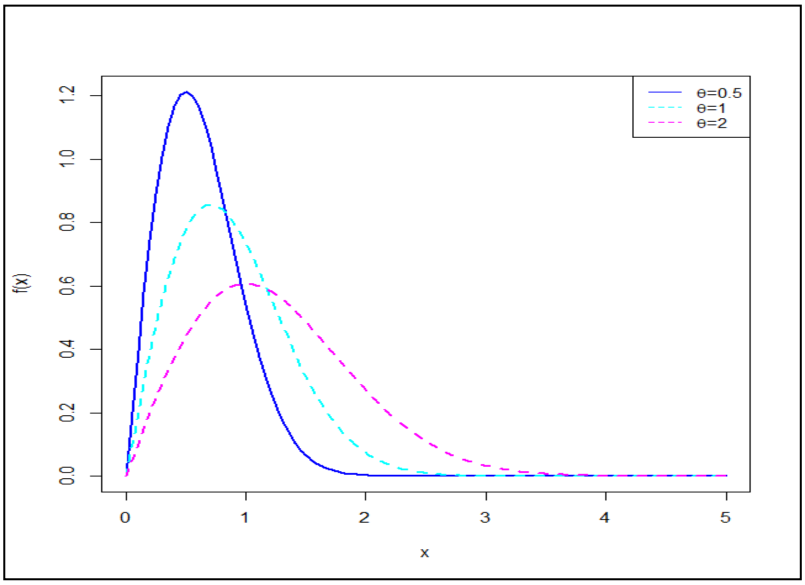
θ : هي معلمة القياس $\theta>0\ ,\ t>0$

أما الدالة التوزيع التراكمية C.d.f له فتعطى بالصيغة:

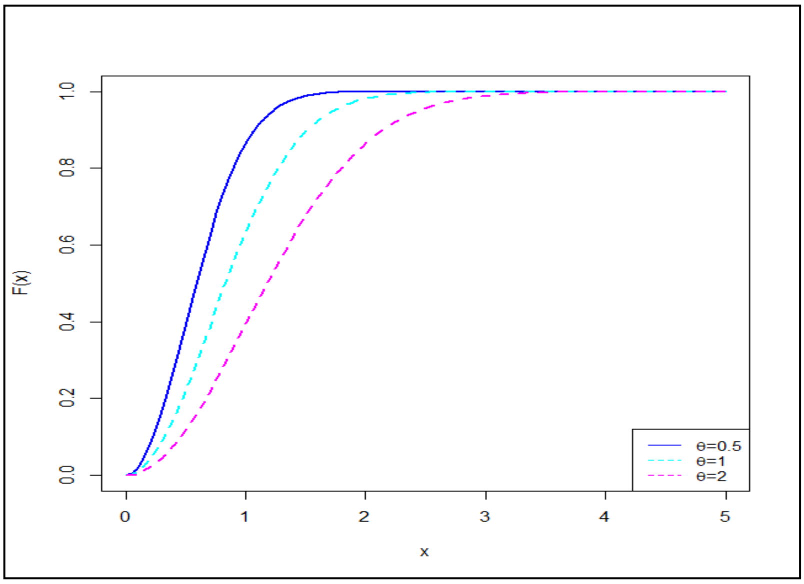
$$F(t) = 1 - e^{-t^2/\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$R(t) = e^{-t^2/\theta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

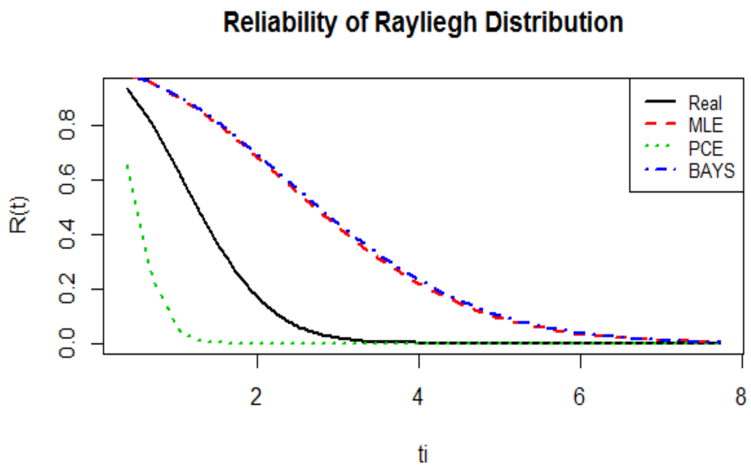
وإن المعادلة (3) تمثل دالة المعولية لتوزيع رايلي، ويكون شكل دالة الكثافة الاحتمالية على النحو الآتي:



الشكل (1) دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع رايلي



الشكل (2) الدالة التجميعية لتوزيع رايلي



الشكل (3) دالة المعولية لتوزيع رايلي

4. طرائق التقدير Estimation Methods:

هناك طرائق عديدة لتقدير معلمة النموذج، إلا أن التقليدية منها تفترض أن المعلمة المراد تقديرها ثابتة وليست متغيرة، وبذا يمكن تقديرها عندما تكون غير معلومة باستعمال بيانات لمشاهدات العينة، ومن أهم الطرق هي:

1-4 طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Method:

إن الخصائص الجيدة التي تمتاز بها هذه الطريقة جعلتها من الطرائق المهمة للتقدير وتستند بالأساس إلى ايجاد قيمة تقدير المعلمة التي تجعل دالة الإمكان الأعظم عند نهايتها العظمى. ويمكن إعطاء دالة الإمكان الأعظم على أنها دالة احتمالية مشتركة بالصيغة الآتية:

$$Lf=f(t_1;\theta).f(t_2;\theta).f(t_3;\theta)\ldots\ldots f(t_n;\theta) \quad \ldots\ldots(4)$$

$$lf(t;\theta) = \frac{2}{\theta}t_1 e^{-\frac{t^2}{\theta}}.\frac{2}{\theta}t_2 e^{-\frac{t^2}{\theta}} \ldots.\frac{2}{\theta}t_n e^{-\frac{t^2}{\theta}} \quad \ldots\ldots(5)$$

$$lf(t;\theta) = \frac{2}{\theta}\prod_{i=1}^{n} t_i\, e^{-\frac{\sum t^2}{\theta}} \quad \ldots\ldots(6)$$

$$lf(t;\theta) = 2^n.\theta^n \prod_{i=1}^{n} t_i\, e^{-\frac{\sum t^2}{\theta}} \quad \ldots\ldots(7)$$

ولغرض تقدير دالة الإمكان يتم أخذ اللوغاريتم الطبيعي (ln) لطرفي المعادلة أعلاه فيتم الحصول على الصيغة الآتية:

$$\ln f(t;\theta) = n\ln(2) - n\ln(\theta) + \sum_{i=1}^{n} \ln t_i \frac{\sum t^2}{\theta} \quad \ldots\ldots(8)$$

يتم اشتقاق المعادلة (8) اشتقاق جزئي بالنسبة إلى θ:

$$\frac{\partial \ln f(t;\theta)}{\partial\theta} = 0 - \frac{n}{\theta} + 0 + \frac{\sum t_i^2}{\theta^2} \quad \ldots\ldots (9)$$

يتم الآن ترتيب المعادلة (9):

$$\frac{\partial \ln f(t;\theta)}{\partial\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{\sum t_i^2}{\theta^2} \quad \ldots\ldots (10)$$

وبأخذ العامل المشترك يتم الحصول على θ التقديرية:

$$\frac{\partial \ln f(t;\theta)}{\partial\theta} = \frac{-n\hat{\theta}+\sum t_i^2}{\theta^2} \quad \ldots\ldots (11)$$

وبمساواة المعادلة (11) بـ الصفر $\frac{\partial \ln f(t;\theta)}{\partial\theta} = 0$

$$\frac{-n\hat{\theta}+\sum ti^2}{\theta^2} = 0 \quad \ldots\ldots (12)$$

$$-n\hat{\theta} + \sum t_i^2 = 0 \quad \ldots\ldots (13)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum ti^2}{n} \quad \ldots\ldots (14)$$

2-4 طريقة المقدرات التجزيئية Method of Percentiles Estimators (PERCE):

قام الباحث (Schimed) في عام (1997) باستخدام الطريقة التجزيئية لتقدير معلمات التوزيع الاسي بمعلمتين، يتم في هذا البحث استخدام نفس الطريقة لتقدير معلمات توزيع ريلي بعلمة واحدة (نعمان وعبدالامير، 2019، 42-58).

$$F(t,\theta) = 1 - e^{-ti^2/\theta} \quad \ldots\ldots (15)$$

ثم يتم ترتيب المعادلة (16) فحصل على:

$$e^{-ti^2/\theta} = 1 - F(t,\theta) \quad \ldots\ldots (16)$$

يتم ضرب طرفي المعادلة (16) باللوغاريتم الطبيعي (Ln):

$$\frac{-t^2}{\theta} = \mathrm{Ln}\big(1 - F(t,\theta)\big) \quad \ldots\ldots (17)$$

$$-t^2=\theta\ \mathrm{Ln}(1-F(t,\theta)) \quad \ldots\ldots (18)$$

يتم الآن ضرب طرفي المعادلة (18) بـ(-):

$$t^2 = -\theta\ \mathrm{Ln}(1-F(t,\theta)) \quad \ldots\ldots (19)$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين:

$$t=\sqrt{-\theta \mathrm{Ln}(1 - F(t,\theta)} \quad \ldots\ldots (20)$$

وبفرض أن $Pi=F(t,\theta)$

$t=\sqrt{-\theta Ln(1-Pi)}$

$ti\sqrt{\theta Ln(1-Pi)}$

$\sum[ti—\sqrt{-\theta Ln(1-Pi)}]^2 = 0$ .... (21)

$\sum_{i=1}^{n}[t_i-\theta-\ln(1-p_i)]^2$ .... (22)

نشتق المقدر (22) باستبدال المعالم (معلمة القياس θ):

$\sum_{i=1}^{n}[ti-\sqrt{\theta}\sqrt{-Ln(1-Pi)}].-\frac{1}{2}\theta^{\frac{1}{2}-1}\sqrt{-Ln(1-Pi)}=0$ .... (23)

$\frac{2}{2}\theta^{\frac{-1}{2}}\sum_{i=1}^{n}\left[ti-\sqrt{\theta}\sqrt{-Ln(1-Pi)}\right]\sqrt{-Ln(1-Pi)}=0$ .... (24)

$\theta^{\frac{-1}{2}}\sum[ti\sqrt{-Ln(1-Pi)}-\sqrt{\theta}\,(\sqrt{-Ln(1-Pi}\,)^2$

$\theta^{\frac{-1}{2}}\theta^{\frac{1}{2}}\sum[ti\sqrt{-Ln(1-Pi)}]^2$

$-\sum(\sqrt{-Ln(1-Pi)}^2=0$ .... (11)

$\theta^{\frac{-1}{2}}\sum ti\sqrt{-Ln(1-Pi}=\sum(\sqrt{-Ln(1-Pi)}^2$ .... (25)

$\frac{\sum ti}{\sqrt{\theta}}\sqrt{-Ln(1-Pi}=\sum(\sqrt{-Ln(1-Pi)}\,)^2$ .... (26)

$\sqrt{\theta}=\frac{\sum(\sqrt{-Ln(1-Pi)})^2}{\sum ti\sqrt{-Ln(1-Pi)}}$ .... (27)

$\hat{\theta}_{p.c.e}=\frac{((\sum Ln(1-Pi)^2)^2}{(\sum_{i=1}^{n}ti\sqrt{-Ln(1-Pi)})^2}$ .... (28)

3-4 مقدر بيز Bayesian Estimator:

اعتبر ثوماس بيز (1761) إن المعلمة θ قد تكون متغير عشوائي يتغير من عينة لأخرى وبالتالي سيكون توزيع أولي يسمى{ [$g(\theta)$] Prior Distribution } يحدد من قبل الخبرة السابقة والبيانات، ثم يتم الحصول على المقدر البيزي بتصغير دالة الخسارة المتوقعة طبقاً للتوزيع الشرطي للمعلمة (θ) نسبة توزيع المشاهدات أي (كمال، 2012، 56-63).

$\min_{\theta}E[L(\hat{\theta},\theta)=\min_{\theta}\int_{0}^{\infty}L(\hat{\theta},\theta)f\left(\frac{\theta}{t}\right)d\theta$ .... (29)

فإن:

$F(t,\theta)=\frac{2}{\theta}te^{-\frac{t^2}{\theta}}$ .... (30)

$$F(t)=\int_0^\infty g(\theta)\prod_{i=1}^n f(t,\theta)d\theta \quad \text{.......... (31)}$$

التوزيع الأولي $g(\theta)=\frac{k}{\theta^c}$

$$=\int_0^\infty \frac{k}{\theta^c}.2^n\theta^{-n}\prod_{i=1}^n t_i\, e^{\frac{-\sum t^2}{\theta}} \quad \text{.......... (32)}$$

$$= k2^n\int_0^\infty \frac{1}{\theta^{c+n}}\prod_{i=1}^n t_i\, e^{\frac{-\sum t^2}{\theta}}d\theta \quad \text{.......... (33)}$$

Let $e^{\frac{-\sum t^2}{\theta}} = y$

Let $\frac{\sum t^2}{\theta} = y$

$$y = \frac{\sum t^2}{\theta} \quad \text{.......... (34)}$$

$$\theta=\frac{\sum t^2}{y} \quad \rightarrow \quad d\theta = -\frac{\sum t^2}{y^2}dy \quad \text{.......... (35)}$$

$$f(t)=k\,2^n.\prod_{i=1}^n t_i\int_0^\infty \frac{1}{(\frac{\sum t^2}{y})^{c+n}}e^{-y}.\frac{-\sum t^2}{y^2}dy \quad \text{.......... (36)}$$

$$=k\,2^n\prod_{i=1}^n t_i\sum t_i^2.\int_0^\infty \frac{y^{c+n}}{(\sum t_i^2)^{c+n}}e^{-y}y^{-2}dy \quad \text{.......... (37)}$$

$$=k\,2^n\prod_{i=1}^n t_i.\frac{1}{(\sum t_i^2)^{c+n-1}}\int_0^\infty y^{c+n-2}\,e^{-y}dy \quad \text{.......... (38)}$$

$$=k2^n\prod_{i=1}^n t_i\frac{1}{(\sum t_i^2)^{c+n-1}}\ \Gamma n+c-1 \quad \text{.......... (39)}$$

$$h(\theta/t) = \frac{e^{-\frac{\sum t_i^2}{\theta}}(\frac{\sum t_i^2}{\theta})^{c+n}}{\Gamma n+c-1\ \ \sum t_i^2} \quad \text{.......... (40)}$$

$$=\frac{e^{-\frac{\sum t_i^2}{\theta}}(\frac{\sum t_i^2}{\theta})^{c+n}}{\sum t_i^2\Gamma n+c-1} \quad \text{.......... (41)}$$

إن توزيع كاما بالمعلمات c+n ,1/θ

وإن دالة الخسارة التربيعية:

$$L(\hat\theta,\theta) = (\hat\theta-\theta)^2$$

$$\text{Risk} = E(\hat\theta-\theta)^2$$

$$= \int_0^\infty(\hat\theta-\theta)^2h(\theta/t)\,d\theta \quad \text{.......... (42)}$$

يتم تبسيط القوس بواسطة فرق مربعين:

$$\int_0^{\infty}\left(\hat{\theta}^2 - 2\hat{\theta}\theta + \hat{\theta}\right)h\left({}^{\theta}/_{t}\right)d\theta \qquad (43)$$

يتم توزيع التكامل على القوس:

$$=\int_0^{\infty}\hat{\theta}^2\, h\left(\left({}^{\theta}/_{t}\right)d\theta - 2\theta\int_0^{\infty}\hat{\theta}h\left({}^{\theta}/_{t}\right)d\theta + \int_0^{\infty}\theta^2 h\left({}^{\theta}/_{t}\right)d\theta \qquad (44)$$

$$E(\hat{\theta})^2 - 2\theta E\left(\hat{\theta}\right) + \theta^2 \qquad (45)$$

$$\frac{\partial \text{Risk}}{\partial\hat{\theta}} = 2E\left(\hat{\theta}\right) - 2\theta = 0 \;\div 2 \qquad (46)$$

$E(\hat{\theta})=\theta$

$$\hat{\theta}_{\text{Bayes}} = E\left(\hat{\theta}(t)\right) \qquad (47)$$

$$\hat{\theta}_{\text{Bayes}} = \frac{\sum t_i^2}{c+n-1} \qquad (48)$$

5. المحاكاة Simulation:

تم توظيف أسلوب المحاكاة في توليد بيانات كاملة تتبع توزيع ريلي لغرض المقارنة بين المقدار الثلاثة، وتم اختيار قيم افتراضية لمعلمة (القياس θ) وبحجوم مختلفة (n=20,60,100)، وكان تكرار هذه التجارب مساوياً إلى (L = 1000) لكل تجربة، وقد تم تنفيذ البرنامج بلغة R، وتم تشكيل الحالات المبينة في الجدول الآتي: (نعمان، 2012، 73)

الجدول (1) القيم الافتراضية لمعلمة القياس

Cases الحالات	θ معلمة القياس
I	1
II	1.35
III	1.75
IV	2.25

الجدول (2) قيم تقدير معلمة القياس (□) عند C= -3

n	Method	$\theta = 1$	$\theta = 1.35$	$\theta = 1.75$	$\theta = 2.25$
20	MLE	0.06161315	0.3034288	1.07297223	3.4232886
	PERCE	0.02556578	0.0132542	0.07597438	0.1871496
	BAYES	0.13119150	0.5779664	1.92827322	5.9246385
60	MLE	0.01806933	0.09273386	0.33352489	1.07435652
	PERCE	0.01145377	0.00246995	0.02264477	0.05988729
	BAYES	0.02340478	0.11457702	0.40280330	1.27924354
100	MLE	0.010404674	0.054043354	0.19533691	0.63100672
	PERCE	0.007740922	0.001180051	0.01308383	0.03544671
	BAYES	0.012176671	0.061365479	0.21866116	0.70017150

الجدول (3) قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) لدالة المعولية عندما C= -3

N	Method	$\theta = 1$	$\theta = 1.35$	$\theta = 1.75$	$\theta = 2.25$
20	MLE	0.03496087	0.06438115	0.09383691	0.12362330
	PERCE	0.01767939	0.01033722	0.04083774	0.05959784
	BAYES	0.05970217	0.09662873	0.13137262	0.16520915
60	MLE	0.03406668	0.064487660	0.09481704	0.12538916
	PERCE	0.02444333	0.005535473	0.03609212	0.05734991
	BAYES	0.04109320	0.073876324	0.10587543	0.13772817
100	MLE	0.03354362	0.064003372	0.09441372	0.12512426
	PERCE	0.02706293	0.004341229	0.03483228	0.05697888
	BAYES	0.03761067	0.069472076	0.10087463	0.13234739

من الجدول (3) يتضح بأن أقل (MSE) كان من نصيب طريقة المقدرات التجزيئية (PERCE)، وهذا يدل على أنها أفضل طريقة في التقدير ولمختلف الحجوم عندما يكون C=-3.

الجدول (4) قيم تقدير معلمة القياس (□) عند C = 2

n	Method	$\theta = 1$	$\theta = 1.35$	$\theta = 1.75$	$\theta = 2.25$
20	MLE	0.06161315	0.3034288	1.07297223	3.4232886
	PERCE	0.02556578	0.0132542	0.07597438	0.1871496
	BAYES	0.05138394	0.2611796	0.93841781	3.0243381
60	MLE	0.01806933	0.09273386	0.33352489	1.07435652
	PERCE	0.01145377	0.00246995	0.02264477	0.05988729
	BAYES	0.01694329	0.08804780	0.31854862	1.02985737
100	MLE	0.010404674	0.054043354	0.19533691	0.63100672
	PERCE	0.007740922	0.001180051	0.01308383	0.03544671
	BAYES	0.010004252	0.052372021	0.18998815	0.61510068

الجدول (5) قيم متوسط مربعات الخطأ (MSE) لدالة المعولية عندما C=2

n	Method	$\theta = 1$	$\theta = 1.35$	$\theta = 1.75$	$\theta = 2.25$
20	MLE	0.03496087	0.06438115	0.09383691	0.12362330
	PERCE	0.01767939	0.01033722	0.04083774	0.05959784
	BAYES	0.03046132	0.05817056	0.08640532	0.11524609
60	MLE	0.03406668	0.064487660	0.09481704	0.12538916
	PERCE	0.02444333	0.005535473	0.03609212	0.05734991
	BAYES	0.03247995	0.062327556	0.09224991	0.12250871
100	MLE	0.03354362	0.064003372	0.09441372	0.12512426
	PERCE	0.02706293	0.004341229	0.03483228	0.05697888
	BAYES	0.03258682	0.062702276	0.09286827	0.12339069

من الجدول (3) يتضح بأن أقل (MSE) كان من نصيب طريقة المقدرات التجزيئية (PERCE)، وهذا يدل على أنها أفضل طريقة في التقدير ولمختلف الحجوم عندما يكون C=2.

6. الاستنتاجات Conclusions:

1. ظهرت نتائج البحث بأن طريقة المقدرات التجزيئية (PERCE) هي الأفضل من بقية طرائق التقدير الأخرى بالنسبة ولمختلف الحجوم.
2. احتلت طريقة الإمكان الأعظم المرتبة الثانية على أفضلية طرائق التقدير لأغلب القيم الافتراضية ولجميع حجوم العينات.
3. تتقارب نتائج التقدير لطريقة بيز عندما C=2 مع نتائج التقدير لطريقة بيز عندما C=3 وخاصة عند قيم البيانات الكبيرة.
4. بينت النتائج بأن مجموع مربعات الخطأ MSE يقل كلما ازداد حجم العينة، وهذا يتفق مع النظرية الإحصائية.
5. في مقارنة الدالة المعولية للطرق الثلاثة تبين إنه كلما زادت قيمة θ التقديرية قلت قيمة متوسط مربعات الخطأ وبالعكس.

7. التوصيات Recommendations:

1. استعمال طرائق اعتيادية وبيزية جديدة للتقدير وذلك باستعمال دوال خسارة مختلفة.
2. إضافة معالم أخرى للبحث وتقديرها لهذا التوزيع.
3. تطبيق هذه الطرق على توزيعات أخرى وقياس كفاءتها بمقاييس أخرى غير متوسط مربعات الخطأ MSE مثل مقياس متوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE).
4. ايجاد فترات الثقة أو حدود الثقة للمعالم والدوال المعولية ولتوزيعات عديدة.

8. المصادر References:

1. جلوب، إسماعيل هادي، شفيق، بلسم مصطفى، (2013) "مقارنة بعض طرائق التقدير البيزية مع طرائق أخرى لتوزيع ريلي لبيانات تحت المراقبة بين النوع الأول باستخدام المحاكاة"، مجلة الإدارة والاقتصاد، السنة السادسة والثلاثون، العدد سبعة وتسعون، ص318-328.
2. كمال، غفران إسماعيل، (2012) "توظيف أسلوب Jackknife لايجاد مقدرات معولية توزيع رايلي ذات المعلمة الواحدة ومقارنتها ببعض الطرق الأخرى"، المجلة العرقيه للعلوم الإدارية والاقتصادية، المجلد 8، العدد 34، ص56-63.
3. محمد، نشأت جاسم، (2013) "مقارنة طرائق محورة لتقدير دالة المعولية لتوزيع رايلي بمعلمتين باستخدام المحاكاة"، مجلة الغري للعلوم الاقتصادية والإدارية، المجلد 7، العدد 20.
4. محمود، سحر طارق، "استخدام المحاكاة في تقدير معلمة القياس لتوزيع كاما المستمر"، مجلة الإدارة والاقتصاد، المجلد الثالث، العدد الثاني عشر، ص270-285.
5. نعمان، انعام عبدالرحمن، (2012) "تصميم خطط عينات القبول للشركة العامة للصناعات الالكترونية باستخدام التوزيع الاسي العام"، أطروحة دكتوراه، جامعة بغداد، كلية الإدارة والاقتصاد.
6. نعمان، انعام عبدالرحمن، عبدالامير، هدى عامر، (2019) "مقارنة بين الطرائق الاعتيادية والبيزية لتقدير معلمة الشكل ودالة المعولية لتوزيع بور نوع X أو توزيع رآلي الأسي ذي المعلمتين تحت دوال خسارة مختلفة"، مجلة الإدارة والاقتصاد، المجلد 42، العدد 119، ص42-58.